Total No. of Pages: 02 **[Total No. of Questions : 14]**

5032

ITEP (B.Sc. B.Ed.)
II Semester Examination 2025
MATHEMATICS PAPER
DCMA-203 : Abstract Algebra-I (Major)

Duration of Examination: 3 Hours ***Max. Marks: 70***
परीक्षा की अवधि: 3 घण्टा ***पूर्णांक: 70***

Instructions to the Candidates:
परीक्षार्थी के लिए निर्देश:-

Questions paper is divided into two parts viz A and B. Part A consists of 10 compulsory questions which are short answered. Attempt questions from Part B selecting at least one question from each unit. Answer limit is 300 words. The marks of each question are given against it.
प्रश्न पत्र अ और ब दो भागों में विभाजित है। भाग-अ में 10 अनिवार्य प्रश्न हैं जो लघुउत्तरात्मक हैं। भाग-ब में प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए उत्तर दीजिये। उत्तर सीमा 300 शब्द है। प्रत्येक प्रश्न के अंक सामने अंकित है।

023

Part-A / भाग-अ

1) Is the set of all natural number forms a group with respect to usual multiplication? Justify your claim.
क्या सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय सामान्य गुणा (Usual Multiplication) के सन्दर्भ में एक समूह (Group) बनाता है? अपने उत्तर का औचित्य स्पष्ट कीजिए।
2) Define and differentiate order of an element and order of a group, with an example.
किसी तत्व (Element) का क्रम (Order) और समूह (Group) का क्रम (Order) परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण सहित अंतर स्पष्ट कीजिए।
3) Give the condition under which the union of two subgroups is again a subgroup.
वह शर्त दीजिए जिसके अंतर्गत दो उपसमूहों का संयोग पुनः एक उपसमूह होता है।
4) Find the cosets of $H = \{1, -1\}$ in the multiplicative group $(G = \{1, -1, i, -i\}, \times)$.
गुणात्मक समूह $(G = \{1, -1, i, -i\}, \times)$ में उपसमूह $H = \{1, -1\}$ के कोसेट ज्ञात कीजिए।
5) Define Format's Theorem on groups.
समूहों (Groups) पर फ़ॉर्मेट का प्रमेय (Format's Theorem) परिभाषित कीजिए।
6) What is the order of the subgroup of even permutations in the permutation group of n symbols?
n प्रतीकों के क्रमचय समूह (Permutation Group) में सम क्रमचय (Even Permutations) के उपसमूह का क्रम ज्ञात कीजिए।
7) Define is a cycle and write the identity element in the permutation group S_3.
एक चक्र (Cycle) को परिभाषित कीजिए और क्रमचय समूह S_3 में तटस्थ तत्व (Identity Element) लिखिए।
8) Define a normal subgroup with an example. Is trivial subgroup $\{e\}$ always a normal subgroup?
एक सामान्य उपसमूह (Normal Subgroup) को परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण दीजिए। क्या शून्य उपसमूह $\{e\}$ हमेशा सामान्य उपसमूह होता है?
9) Define Kernal and Range of a group homomorphism.
समूह समरूपन (Group Homomorphism) का कर्नेल (Kernel) और मान (Range) परिभाषित कीजिए।
10) State the third isomorphism theorem for groups.
समूहों के लिए तृतीय समरूपन प्रमेय (Third Isomorphism Theorem) लिखिए।

Part-B / भाग- ब
Unit-I / इकाई-I

11) a) Show that order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of group.
दिखाइए कि किसी सीमित समूह (Finite Group) के प्रत्येक तत्व का क्रम (Order) सीमित होता है और समूह के क्रम के बराबर या उससे कम होता है।
b) Is the set of fourth roots of unity an abelian group? Discuss.
क्या यूनिटी के चौथे मूल (Fourth Roots of Unity) का समुच्चय एबेलियन समूह (Abelian Group) है? चर्चा कीजिए।

OR / अथवा

a) Show that every cyclic group is an abelian group. Does the converse hold? Justify your answer
दिखाइए कि प्रत्येक चक्रीय समूह (Cyclic Group) एक एबेलियन समूह (Abelian Group) होता है। क्या इसका विलोम सत्य है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

---

b) Define the center of a group and show that the inverse of the inverse of any element in a group is the element itself.
किसी समूह (Group) का केंद्र (Center) परिभाषित कीजिए और दिखाइए कि किसी भी तत्व का व्युत्क्रम का व्युत्क्रम (Inverse of the Inverse) वही तत्व होता है।

Unit-II / इकाई-II

12) a) Show that order of every subgroup group of a finite group divides order of group.
दिखाइए कि किसी सीमित समूह (Finite Group) के प्रत्येक उपसमूह (Subgroup) का क्रम (Order) समूह के क्रम को विभाजित करता है।

b) Show that the relation of congruency in a group G defined by $a \equiv b \ mod \ (H)$ if and only if $ab^{-1} \in H$ is a transitive relation, where H is a subgroup of G.
दिखाइए कि समूह G में संबंध $a \equiv b \ mod \ (H)$, यदि और केवल यदि $ab^{-1} \in H$, एक संक्रमणशील (Transitive) संबंध है, H जहाँ G का उपसमूह है।

OR / अथवा

a) Prove the set P_n of all permutation on n symbols is a group of order $n!$ under the product of permutations.
सिद्ध कीजिए कि n प्रतीकों पर सभी क्रमचय (Permutation) का समुच्चय P_n, क्रमचय के गुणा (Product of Permutations) के अंतर्गत n! क्रम वाला समूह है।

b) Define Right and left Cosets, and are they always identical? Justify your claim
दाएँ (Right) और बाएँ (Left) सहसमूह (Cosets) को परिभाषित कीजिए। क्या ये हमेशा समान होते हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

Unit-III / इकाई-III

13) a) Prove that a sub group H of a group G is normal subgroup if and only if the product of two right (left) cosets of H in G is again a right (left) coset of H in G.
सिद्ध कीजिए कि समूह G का उपसमूह H सामान्य उपसमूह (Normal Subgroup) है, तब और केवल तब जब G में H के दो दाएँ (Right) या बाएँ (Left) सहसमूहों (Cosets) का गुणनफल फिर से H का एक दाएँ (Right) या बाएँ (Left) सहसमूह हो।

b) Define internal direct product and external direct product with an example each.
आंतरिक (Internal) और बाह्य (External) प्रत्यक्ष गुणनफल (Direct Product) को परिभाषित कीजिए और प्रत्येक के लिए एक उदाहरण दीजिए।

OR / अथवा

State and prove the fundamental theorem of finite abelian groups.
सीमित एबेलियन समूह (Finite Abelian Group) का मूल सिद्धांत (Fundamental Theorem) लिखिए और प्रमाणित कीजिए।

Unit-IV / इकाई-IV

14) a) Is the map $\varphi: (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$ defned by $\varphi(x) = e^x$, for all $x \in \mathbb{R}$ a group isomorphism? Justify your claim with proper description.
क्या मैप $\varphi: (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$ जिसे $\varphi(x) = e^x$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए परिभाषित है, समूह समरूपता (Group Isomorphism) है? उचित व्याख्या के साथ अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

b) State and prove Cayleys theorem.
केयली का प्रमेय (Cayley's Theorem) लिखिए और सिद्ध कीजिए।

OR / अथवा

a) Show that the Kernel of group homomorphism $\varphi: (G, *_1) \to (H, *_2)$ is a subgroup of $(G, *_1)$.
दिखाइए कि समूह होमोमोर्फिज़्म $\varphi: (G, *_1) \to (H, *_2)$ का कर्नेल $(G, *_1)$ का एक उपसमूह है।

b) Sate and prove first isomorphism theorem (fundamental theorem of homomorphism) of groups.
समूहों का पहला समरूपता प्रमेय (First Isomorphism Theorem / Homomorphism का मूल सिद्धांत) लिखिए और सिद्ध कीजिए।