



9467

ITEP B.Sc. B.Ed. (III Semester) Examination, 2024
MATHEMATICS PAPER
(DCMA-302) MAJOR
ABSTRACT ALGEBRA - II
(Held in 2025)

Duration of Examination: 3 Hours

परीक्षा की अवधि: 3 घण्टा

Max. Marks: 70

पूर्णांक : 70

Instructions to the Candidates:**परीक्षार्थी के लिए निर्देश:-**

Question paper is divided into parts viz A & B. Part A consists of 10 compulsory questions which are short answer. Attempt question from Part B by selecting at least one question from each unit.

प्रश्न पत्र अ और ब दो भागों में विभाजित है। भाग-अ में 10 अनिवार्य प्रश्न हैं जो लघुउत्तरात्मक हैं। प्रत्येक इकाई से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए भाग बी से प्रश्नों को हल करें।

022

Part-A/भाग-अ

1. Give an example of each of the following. 10x2=20
निम्न में प्रत्येक का एक-एक उदाहरण दीजिए।
 - a. A commutative ring without unity.
एक क्रमविनिमेय वलय जिसमें तत्समक नहीं हो।
 - b. A ring which is not an integral domain.
एक वलय जो पूर्णांकीय प्रान्त नहीं हो।
2. Define subring. Write necessary and sufficient conditions for a non-void subset S of a ring R to be a subring of R.
उपवलय को परिभाषित कीजिए। किसी वलय R से एक अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए R का एक उपवलय होने हेतु आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।
3. Define principal ideal with example.
मुख्य गुणजावली को उदाहरण सहित परिभाषित करें।
4. Define quotient Ring.
विभाग वलय को परिभाषित करें।
5. Prove that the polynomial $x^2 + x + 1 \in Z_2(x)$ is irreducible.
सिद्ध कीजिए कि बहुपद $x^2 + x + 1 \in Z_2(x)$ अखण्डनीय है।
6. Define Unique factorization domain.
अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त को परिभाषित करें।
7. Define Ring isomorphism.
वलय तुल्याकारिता को परिभाषित करें।
8. Give Reason that it is ring or not.
कारण बताइए कि यह वलय है अथवा नहीं

$$\{x_i : x \in R, i = \sqrt{-1}, + \text{ and } x \text{ of numbers}\}$$
9. Define characteristics of ring. Find the characteristics of ring $(z, +, \cdot)$.
वलय के अभिलक्षण को परिभाषित करते हुए वलय $(z, +, \cdot)$ का अभिलक्षण ज्ञात कीजिए।
10. Define integral domain with example.
पूर्णांकीय प्रान्त को उदाहरण सहित परिभाषित करें।



Part-B/भाग-ब

Unit-I/इकाई-1

11. Show that the set of Gaussian integer $J = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ is a ring w.r.t. addition and multiplication of complex numbers. Is it an integral domain? Is it a field? 12

सिद्ध कीजिए कि गाउसीय पूर्णांकों का समुच्चय $J = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ सामिग्र संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए एक वलय है। क्या यह एक पूर्णांकीय प्रान्त है? क्या यह एक क्षेत्र है?

OR/अथवा

If a be an element of a ring R , then prove that the normalizer of a in R $N(a) = \{r \in R : ar = ra\}$ is a subring of R .

यदि a किसी वलय R का अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि R में a का प्रसामान्यक $N(a) = \{r \in R : ar = ra\}$ R का एक उपवलय है।

Unit-II/इकाई-2

12. Prove that if I_1 , and I_2 be two ideals of a ring R , then $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ is an ideal of R containing both I_1 and I_2 . 12

यदि I_1 और I_2 किसी वलय R की दो गुणनावलियों हों, तो $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 और I_2 दोनों अंतर्विष्ट हैं।

OR/अथवा

State and prove remainder theorem and factor theorem.

शेषफल प्रमेय तथा खण्ड प्रमेय का कथन लिखते हुए सत्यापित कीजिए।

Unit-III/इकाई-3

13. (a) If R/I is ring of residue classes in R , then 13

यदि R/I वलय R का एक विभाग वलय हो, तो

- (i) R is commutative $\Rightarrow R/I$ is also commutative.

R क्रमविनिमेय है $\Rightarrow R/I$ भी क्रमविनिमेय है।

- (ii) R has unity $\Rightarrow R/I$ also has unity.

R तत्समकी है $\Rightarrow R/I$ तत्समकी है।

- (b) Every Quotient ring of a ring R is a homomorphic image of R .

किसी वलय R का प्रत्येक विभाग वलय R का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

OR/अथवा

State and Prove the fundamental theorem on Ring Homomorphism.

वलय समाकारिता पर मूलभूत प्रमेय का कथन लिखते हुए सिद्ध कीजिए।

Unit-IV/इकाई-4

14. If $(R, +, \cdot, X)$ is a ring such that $a^2 = a \ \forall a \in R$, then prove that

यदि $(R, +, \cdot, X)$ एक ऐसा वलय हो कि $a^2 = a \ \forall a \in R$, तो सिद्ध कीजिए।

- (a). $a + a = 0$, (b). $a + b = 0 \Rightarrow a = b$, (c). R is commutative Ring (R क्रमविनिमेय वलय है)

OR/अथवा

For any $a, b, c \in R$ Show that (R, \oplus, \otimes) is a field for the operation define below:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ and } a \otimes b = a + b - ab \ \forall a, b, c \in R$$

सिद्ध कीजिए कि (R, \oplus, \otimes) एक क्षेत्र है जहाँ संक्रियाएँ \oplus, \otimes निम्न प्रकार परिभाषित हैं -

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ and } a \otimes b = a + b - ab \ \forall a, b, c \in R$$